Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Année 2010-2011
Module M111
MIPC

Série n° 5

Exercice 1.

Pour chacune des matrices suivantes on dira s'ellle est inversible ou non :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \ E = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} ; \ F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix} ;$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} ; \ H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Dans le cas où la matrice est inversible, on calculera l'inverse.
2. En déduire la solution du système à trois équations et à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x - 7y - z = 10 \end{cases} .$$

Exercice 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $A^2 + I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles, et que $A^3 - I_n$ n'est pas inversible si A est non nulle.

Exercice 3.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2. Vérifier la relation $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4.

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^2 puis B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Vérifier que $B + I_3 = A$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^3$, trouver la matrice de passage P de la base canonique (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = (0,1,1), \quad e'_2 = (1,0,1), \quad e'_3 = (1,1,0).$$

Calculer P^{-1}.

Exercice 6.

Soit V un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension 3 et $(a_1, a_2, a_3), (a'_1, a'_2, a'_3)$ deux bases de V telles que :

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_1 + a_2, \quad a'_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

1. Trouver la matrice de passage P de la base (a_1, a_2, a_3) à la base (a'_1, a'_2, a'_3).
2. Calculer P^{-1}.
3. Généraliser le résultat à un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Exercice 7.

Soit $V = \{\alpha t^2 + \beta t + \gamma \ / \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ et f l'endomorphisme de V dont la matrice dans la base $(1, t, t^2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (3t^2 + 2t, 5t^2 + 3t + 1, 7t^2 + 5t + 3)$ est une base de V.
2. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 8.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme :

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des éléments de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$
2. Trouver une base de ce sous-espace vectoriel.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A(a, b, c)$. Trouver la matrice de f par rapport à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3.$$



— — — — — — — —

Correction de la série $n°5$.

Exercice 1.

1. Pour répondre à cette question nous allons utiliser la méthode de Jordan (Utilisation d'opérations élémentaires)

a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant est nul.

b) La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant est nul ($\det(A) = 1$). Calculons son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \longleftarrow L_1 - L_3]{L_2 \longleftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ ; donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autre méthode :

Soit (x, y, z) et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tels que : son déterminant est nul. $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a :

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff B^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = x' \\ y + z = y' \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y' - z' \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ ; donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\det(C) = 0$.

d) On a :

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$ donc D n'est pas inversible.



$e)$ $\det(E) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -2$; donc E est inversible et $E^{-1} = \frac{1}{\det(E)}{}^t Com(E) =$
$\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

$f)$ $\det(F) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1 \end{pmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 16$; donc F est inversible, et

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrows L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \longleftarrow -\frac{1}{4}L_3]{L_2 \longleftarrow -\frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 - L_3]{L_1 \longleftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 - L_3]{L_1 \longleftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & \frac{2}{4} & - \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{4} & - \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \longleftarrow -L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

donc $F^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

$g)$ $\det(G) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{pmatrix}$

$= -1$; donc G est inversible, et

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \longleftarrow L_3 -}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 26 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \longleftarrow L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & -11 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \longleftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 32 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 11 & -1 \end{array}\right)$$



donc $G^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

$h)$ On a : $\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$
$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; donc H est inversible, et

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 - L_2]{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \longleftarrow L_4 + L_2]{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 - L_4]{L_1 \longleftarrow L_1 - L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \longleftarrow L_2 + L_3]{L_1 \longleftarrow L_1 + L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \longleftarrow -L_3]{L_1 \longleftarrow -L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right); \text{ donc } H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le système :

$$\begin{cases} -x + y - z = -2 \\ 2x - 2y - 2z = 4 \\ 3x - 7y - z = 10 \end{cases}$$

s'écrit aussi : $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$; comme F est inversible et que $F^{-1} =$
$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

– – – – – – –

Exercice 2.



On a :

$A^3 + A^2 + A = 0 \iff A^3 + A^2 + A + I_n = I_n \iff A^2(A + I_n) + I_n(A + I_n) = I_n \iff (A^2 + I_n)(A + I_n) = I_n$;

de même, $A^3 + A^2 + A = 0 \iff A^3 + A^2 + A + I_n = I_n \iff (A + I_n)A^2 + (A + I_n)I_n = I_n \iff (A + I_n)(A^2 + I_n) = I_n$; donc $(A + I_n)$ (resp. $(A^2 + I_n)$) est inversible d'inverse $(A^2 + I_n)$ (resp. $(A + I_n)$).

D'autre part, $A^3 + A^2 + A = 0 \iff A(A^2 + A + I_n) = 0 \Longrightarrow A(A^2 + A + I_n)(A - I_n) = 0 \iff A(A^3 - I_n) = 0$ car $(A^2 + A + I_n)(A - I_n) = A^3 - I_n$; si $A^3 - I_n$ est inversible, alors

$A(A^3 - I_n) = 0 \iff (A(A^3 - I_n))(A^3 - I_n)^{-1} = 0 \iff A = 0$ ceci contredit l'hypothèse $A \neq 0$; donc $A^3 - I_n$ n'est pas inversible.

– – – – – – –

Exercice 3.

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire de 1. que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0 \iff I_3 = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)A$; donc A est inversible et $A^{-1} = (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3)$.

– – – – – – –

Exercice 4.

1. On a : $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B.$

Montrons, par récurrence sur n, que $B^n = 3^{n-1}B$; la propriété est vraie pour $n = 1, 2$; supposons qu'elle soit vraie à l'ordre n, alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = (3^{n-1}B) \times B = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1} \times 3B = 3^n B.$$

2. Il est clair que $B + I_3 = A$. Comme $B \times I_3 = I_3 \times B$,

$$A^n = (B + I_3)^3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (I_3)^{n-k},$$



avec $B^0 = (I_3)^0 = I_3$; on a :

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k + I_3 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (3^{k-1}B) + I_3 = (\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^{k-1})B + I_3 = \frac{1}{3}(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^k)B + I_3 = \frac{1}{3}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k - 1)B + I_3 = \frac{1}{3}(4^n - 1)B + I_3$.

– – – – – – – –

Exercice 5.

On a :

$e'_1 = (0,1,1) = e_2 + e_3$, $e'_2 = (1,0,1) = e_1 + e_3$ et $e'_3 = (1,1,0) = e_1 + e_2$; donc la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

P^{-1} est la matrice de passage de la base (e'_1, e'_2, e'_3) à la base (e_1, e_2, e_3). On a :

$\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_2 + e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_2 + e'_3) \\ e_3 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3) \end{cases}$; donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

– – – – – – – –

Exercice 6.

1. La matrice de passage de la base (a_1, a_2, a_3) à la base (a'_1, a'_2, a'_3) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. P^{-1} est la matrice de passage de la base (a'_1, a'_2, a'_3) à la base (a_1, a_2, a_3) :

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_1 + a_2 \\ a'_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a'_1 \\ a_2 = a'_2 - a'_1 \\ a_3 = a'_3 - a'_2 \end{cases} ;$$

donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Soit V un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension n et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ deux bases de V telles que :

$$a'_1 = a_1, \quad a'_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, a'_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$



La matrice de passage de la base $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ à la base $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ à la base $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est P^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{c} a'_1 = a_1 \\ a'_2 = a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a_1 = a'_1 \\ a_2 = a'_2 - a'_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n = a'_n - a'_{n-1}. \end{array} \right. ,$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

– – – – – – – –

Exercice 7.

1. L'espace vectoriel V est de dimension 3 : $(1, t, t^2)$ est une base de V. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre ou génératrice.

$\mathcal{B}$ est libre .

Soient $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha(3t^2+2t) + \beta(5t^2+3t+1) + \lambda(7t^2+5t+3) = 0$, alors $\alpha(3t^2+2t) + \beta(5t^2+3t+1) + \lambda(7t^2+5t+3) = 0 \iff (3\alpha+5\beta+7\lambda)t^2 + (2\alpha+3\beta+5\lambda)t + (\beta+3\lambda) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} 3\alpha+5\beta+7\lambda = 0 \\ 2\alpha+3\beta+5\lambda = 0 \\ \beta+3\lambda = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \beta = -3\lambda \\ 3\alpha - 15\lambda + 7\lambda = 0 \\ 2\alpha - 9\lambda + 5\lambda = 0 \end{array} \right.$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} \beta = -3\lambda \\ 3\alpha - 8\lambda = 0 \\ 2\alpha - 4\lambda = 0 \end{array} \right. \iff \alpha = \beta = \lambda = 0$; donc $\mathcal{B}$ est libre.

$\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit $\alpha t^2 + \beta t + \gamma \in V$; Cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = a(3t^2+2t) + b(5t^2+3t+1) + c(7t^2+5t+3) \ (*).$$

On a : $(*) \iff (3a+5b+7c)t^2 + (2a+3b+5c)t + (b+3c) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \iff$ $\left\{ \begin{array}{c} 3a+5b+7c = \alpha \\ 2a+3b+5c = \beta \\ b+3c = \lambda \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = -3c + \lambda \\ 3a - 15c + 5\lambda + 7c = \alpha \\ 2a - 9c + 3\lambda + 5c = \beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = -3c + \lambda \\ 3a - 8c = \alpha - 5\lambda \\ 2a - 4c = \beta - 3\lambda \end{array} \right. \iff$ $\left\{ \begin{array}{l} a = -\alpha + 2\beta - \lambda \\ b = \frac{1}{4}(6\alpha - 9\beta + \lambda) \\ c = \frac{1}{4}(-2\alpha + 3\beta + \lambda) \end{array} \right.$; donc $\mathcal{B}$ est génératrice.



2. La matrice de passage de $(1, t, t^2)$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculons P^{-1} : soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}$, alors $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a : $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y + 3z = x' \\ 2x + 3y + 5z = y' \\ 3x + 5y + 7z = z' \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -3z + x' \\ 2x + 3(-3z + x') + 5z = y' \\ 3x + 5y + 7z = z' \end{array} \right. \Longleftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{c} y = -3z + x' \\ 2x = 4z - 3x' + y' \\ \frac{3}{2}(4z - 3x' + y') + 5(-3z + x') + 7z = z' \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -3z + x' \\ x = \frac{1}{2}(4z - 3x' + y') \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z' \end{array} \right.$
$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{2}(x' + 3y' - 2z') - 3x' + y') = \frac{1}{2}(-2x' + 4y' - 2z') \\ y = -3(\frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z') + x' = \frac{1}{4}x' - \frac{9}{4}y' + \frac{3}{2}z' \\ z = \frac{1}{4}x' + \frac{3}{4}y' - \frac{1}{2}z' \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{1}{4}(-4x' + 8y' - 4z' \\ y = \frac{1}{4}(x' - 9y' + 6z') \\ z = \frac{1}{4}(x' + 3y' - 2z'), \end{array} \right.$

donc $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

− − − − − − − −

Exercice 8.

1. $\mathcal{A}$ est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathcal{A}$. Soient $A(a, b, c)$, $A(a', b', c') \in \mathcal{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \alpha A(a, b, c) + \beta A(a', b', c') &= \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') & (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') - (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') - (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') & (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') + (\alpha c \\ (\alpha a + \beta a') + (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') - (\alpha c + \beta c') & (\alpha a + \beta a') - (\alpha b + \beta b') \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$



2. Tout élément $A(a,b,c)$ de $\mathcal{A}$ s'écrit :

$$A(a,b,c) = aA(1,0,0) + bA(0,1,0) + cA(0,0,1),$$

donc ($A(1,0,0)$, $A(0,1,0)$, $A(0,0,1)$) est une fammille génératrice de $\mathcal{A}$. D'autre part, pour tous $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que : $\alpha A(1,0,0) + \beta A(0,1,0) + \lambda A(0,0,1) = 0$, on a :

$$\alpha A(1,0,0) + \beta A(0,1,0) + \lambda A(0,0,1) = 0 \iff A(\alpha,\beta,\lambda) = 0 \iff \alpha = \beta = \lambda = 0;$$

donc ($A(1,0,0)$, $A(0,1,0)$, $A(0,0,1)$) est une fammille libre de $\mathcal{A}$; par suite ($A(1,0,0)$, $A(0,1,0)$, $A(0,0,1)$) est une base de $\mathcal{A}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est $A(a,b,c)$. Trouver la matrice de f par rapport à la base (e'_1, e'_2, e'_3) :

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}A(a,b,c)P.$$

On a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a & a-b+c & a-c \\ 3a & a & a+b+c \\ 3a & a+b-c & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & a-b+c & a-c \\ 0 & b-c & b+2c \\ 0 & 2(b-c) & c-b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

– – – – – – –

